

Машинное обучение

«Обучение – это любое изменение в системе, приводящее к улучшению решения задачи при ее повторном предъявлении или к решению другой задачи на основе тех же данных».

Герберт Саймон, 1983г.

Два подхода к обучению – обучение с учителем и самообучение или обучение с подкреплением.

Обучение с учителем - система получает от учителя инструкции, определяющие ее действия в заданной ситуации при решении конкретной задачи, т.е. настройка (обучение) системы производится явным образом самим обучающим.

Пример. Введение в компьютер программы, предназначенной для решения конкретной задачи, можно считать обучением с учителем.

В таком случае формирование обучающего множества не требуется, а некоторое количество примеров исходных данных с известными ответами используется для тестирования построенной системы.

Самообучение

При самообучении система получает только исходные данные из обучающего множества и оценку результата ее действий. Сам алгоритм обучения создается и закладывается в систему разработчиком, но изменения в системе (ее настройка) в процессе обучения происходит в автоматическом режиме и учитель не знает ее результатов заранее.

Пример. Самообучение игре «крестики-нолики 3Х3».

Вначале создается таблица (дерево ходов), в которой каждому возможному состоянию игры соответствует число, определяющее ценность состояния, т.е. оценку текущей вероятности победы, если игра начинается с этого состояния. Например, 1 – состояния, приводящие к победе, 0 – состояния, приводящие к ничьей или поражению, и 0,5 – неизвестные позиции (первоначально все состояния, кроме конечных, имеют значение 0,5). Эта таблица используется для выработки стратегии победы, при которой ничья или победа соперника рассматриваются как поражение. Во время игры из всех возможных ходов выбирается тот, который имеет максимальную ценность (при одинаковой ценности ход выбирается случайно). Если партию выиграла система, то повышается ценность всех сделанных ею в этой партии ходов, а если система проиграла, то ценность всех ходов уменьшается. Если игра закончилась в ничью, то ценность ходов уменьшается в меньшей степени. В результате многократных повторений система улучшает качество игры и начинает в каждой ситуации выбирать наиболее правильный ход.

Особенности обучения с подкреплением

- разработчик не закладывает выигрышной стратегии в систему, а только правила игры (возможные ходы) и алгоритм изменения оценки сделанных системой ходов на основе результатов каждой законченной игры;
- в процессе работы система изменяет ценность возможных ходов в зависимости от результатов игры, т.е. предсказать ход игры практически невозможно;
- применение данного метода к более сложным играм вызывает существенные трудности, т.к. с усложнением игры во многом исчезает явная зависимость между конкретным ходом и результатом всей игры.

Замечание. Выбор хода из всех возможных можно выполнять случайным образом, при условии что вероятность выбора каждого хода пропорциональна его текущей ценности. Это позволяет системе в одинаковом положении делать разные ходы и по итогам игры менять ценность ходов, что приведет к изменению ценности ходов в каждом положении.

Обучение распознаванию образов

Каждый элемент обучающего множества состоит из вектора признаков образа $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, где n – число признаков, и номера класса j , к которому образ относится ($j = 1, \dots, m$, где m – число распознаваемых классов).

В процессе обучения изменяются значения элементов c_{ji} ($i = 1, \dots, n$) решающей матрицы \mathbf{C} , используемой при распознавании неизвестного образа. Каждая j -ая строка решающей матрицы соответствует одному из распознаваемых классов.

Для распознавания образа \mathbf{X} , с помощью матрицы \mathbf{C} находится вектор решений \mathbf{R} , каждый элемент которого r_j , соответствует одному из распознаваемых классов и вычисляется по формуле

$$r_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i.$$

В матричной форме – $\mathbf{R} = \mathbf{CX}^T$.

Образ относится к классу j с максимальным значением r_j . Если таких классов несколько, то выбирается класс с минимальным номером, т.е. при $r_p = r_l = \max(r_j)$ и $p < l$ образ относится к классу p .

Общий алгоритм обучения

В начале выполняется инициализация матрицы **C** (обычно обнуление), после чего на вход обучаемой системы распознавания последовательно подаются образы из обучающего множества. Для каждого вектора **X** по матрице **C** вычисляется вектор решений **R**, определяется класс, к которому относится предъявленный образ, и при необходимости выполняется коррекция матрицы **C**. Если система правильно распознает все образы из обучающего множества, то обучение заканчивается успешно.

Последовательности предъявления образов:

- если при распознавании произошла ошибка, то образ предъявляется повторно, а если ошибки нет, то предъявляется следующий образ;
- при любом исходе распознавания предъявляется следующий по порядку образ из обучающего множества.

Порядок предъявлению образов из разных классов:

- образы из одного класса предъявляются до тех пор, пока система не научится их распознавать;
- образы предъявляются в произвольном порядке, независимо от классов, к которым они относятся.

Методы обучения

Первый метод

При ошибке распознавания изменяются **только две строки** матрицы **C**, соответствующие ошибочно выбранному и правильному классам. Пусть t – правильный номер класса, к которому относится вектор **X**, k – номер класса, к которому он отнесен при распознавании, и $t \neq k$. Тогда элементы строк t и k матрицы **C** изменяются следующим образом:

$C'_{ti} = C_{ti} + X_i$, где C'_{ti} – новое значение элементов строки t матрицы **C**.

$C'_{ki} = C_{ki} - X_i$, где C'_{ki} – новое значение элементов строки k матрицы **C**.

Второй метод

При ошибке распознавания элементы матрицы **C** изменяются так:

$$C'_{ti} = C_{ti} + X_i$$

$C'_{ki} = C_{ki} - X_i$ применяется **ко всем** k -м строкам матрицы **C**, для которых $r_k \geq r_t$ и $k \neq t$.

Третий метод

$C'_{ki} = C_{ki} - X_i$ применяется ко всем k -м строкам матрицы **C**, для которых $r_k \geq r_t$.

Если хотя бы одна строка матрицы **C** на этом шаге обучения корректировалась, то выполняется и $C'_{ti} = C_{ti} + X_i$. Отличие от второго метода – **отсутствие проверки** $k \neq t$, т.е. **правильности распознавания**. В результате после окончания обучения при распознавании вектора **X** среди элементов вектора **R** не будет совпадающих.

Методы обучения

Четвертый метод - «прямое оценивание»

Для каждого предъявленного образа элементы матрицы **C** корректируются сразу **без нахождения вектора R**. Для строк $k \neq t$ $C'_{ki} = C_{ki} - X_j$, для строки t $C'_{ti} = C_{ti} + X_j$. После однократного предъявления всех образов обучение заканчивается и проводится проверка правильности распознавания элементов обучающего множества.

Замечания.

1. При любом способе обучения и порядке предъявления образов обучение рано или поздно будет закончено, но общее число предъявлений зависит от выбранного способа обучения и порядка предъявления образов. Последний цикл предъявлений каждого образа из обучающего множества не должен вызывать изменения решающей матрицы **C**. Именно этот факт и означает успешное окончание процесса обучения.
2. Может случиться так, что процесс обучения никогда не закончится успешно, т.е. при предъявлении всех образов из обучающего множества хотя бы один из них распознается с ошибкой, что соответственно приводит к корректировке матрицы **C** и повторению цикла предъявления всех образов из обучающего множества. Следя за числом циклов предъявления образов и анализируя изменения матрицы **C**, можно обнаружить такую ситуацию и принять соответствующие меры, например, изменить обучающее множество образов или множество признаков.

Пример обучения системы

Обучающее множество

Образ	Класс \ X	1 (крылья)	2(оперенье)	3(мотор)	4(шасси)
1	1 – птица	1	1	0	0
2	2 – самолет	1	0	1	1
3	3 – планер	1	0	0	0
4	3 – планер	1	0	0	1

Классов 3 ($m = 3$), признаков четыре ($n = 4$), все признаки бинарные (есть – 1, нет – 0)

Матрица **C** после инициализации

	x_1	x_2	x_3	x_4
Класс 1	0	0	0	0
Класс 2	0	0	0	0
Класс 3	0	0	0	0

Желательно обучить систему за минимальное число предъявлений образов. Применим для обучения описанные ранее методы и сравним результаты...

Замечание. Информативность признака 1 нулевая, но удалять его не следует. Причина будет объяснена далее (слайды 21 ... 23)

Обучение первым методом

При ошибке распознавания изменяются **только две строки** матрицы **C**, соответствующие ошибочно выбранному и правильному классам.

Обучим систему различать два класса – птицу и самолет, причем **в случае ошибки будем предъявлять образ повторно**.

1. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=0,0,0$; ответ 1 – да; C не меняется

2. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; стр. 1 «-», 2 «+»

Матрица C после образа 2

	1	2	3	4
1	-1	0	-1	-1
2	1	0	1	1
3	0	0	0	0

5. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=1,-1,0$; ответ 1 – да; C не меняется

3. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-3,3,0$; ответ 2 – да; C не меняется

4. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=-1,1,0$; ответ 2 – нет; C стр.1 «+», 2 «-»

Матрица C после образа 1

	1	2	3	4
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	0	0	0	0

6. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-2,2,0$; ответ 2 – да; C не меняется

Система обучена распознавать **два класса** после **шести** предъявлений образов.

Обучение первым методом

При ошибке распознавания изменяются **только две строки** матрицы **C**, соответствующие ошибочно выбранному и правильному классам.

Обучим систему различать два класса – птицу и самолет, причем **при любом исходе** будем предъявлять **следующий образ**.

1. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=0,0,0$; ответ 1 – да; C не меняется

2. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; стр. 1 «-», 2 «+»

Матрица C после образа 2

	1	2	3	4
1	-1	0	-1	-1
2	1	0	1	1
3	0	0	0	0

4. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-2,2,0$; ответ 2 – да; C не меняется

3. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=-1,1,0$; ответ 2 – нет; стр.1 «+», 2 «-»

Матрица C после образа 1

	1	2	3	4
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	0	0	0	0

5. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=1,-1,0$; ответ 1 – да; C не меняется

Система обучена распознавать **два класса** после **пяти** предъявлений образов. Матрица C после обучения совпадает с предыдущей.

Обучение первым методом

Обучим систему распознавать третий **образ** с повторным предъявлением при ошибке.
Матрица **С** перед первым предъявлением третьего образа – результат обучения первым двум классам.

1. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; **С** стр.1 «-», 3 «+»

Матрица **С** после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	1	0	0	0

2. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=-1,0,1$; ответ 3 – да; **С** не меняется

5. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-2,2,0$; ответ 2 – да; **С** не меняется

7. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=-1,0,1$; ответ 3 – да; **С** не меняется

8. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=1,-1,0$; ответ 1 – да; **С** не меняется

9. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-3,2,1$; ответ 2 – да; **С** не меняется

3. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=0,-1,1$; ответ 3 – нет; **С** стр.1 «+», 3 «-»

Матрица **С** после образа 1

	1	2	3	4
1	0	2	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	0	-1	0	0

4. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=2,-1,-1$; ответ 1 – да; **С** не меняется

6. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; **С** стр. 1 «-», 3 «+»

Матрица **С** после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	1	-1	0	0

Система обучена после **девяти** предъявлений образов из обучающего множества.
Общее число предъявлений – $6 + 9 = 15$.

Обучение первым методом

Обучим систему распознавать третий **образ** - при любом исходе будем предъявлять следующий образ.

1. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; C стр.1 «-», 3 «+»

Матрица C после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	1	0	0	0

3. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-2,2,0$; ответ 2 – да; C не меняется

5. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=1,-1,0$; ответ 1 – да; C не меняется

6. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-3,2,1$; ответ 2 – да; C не меняется

7. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=-1,0,1$; ответ 3 – да; C не меняется

2. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=0,-1,1$; ответ 3 – нет; C стр.1 «+», 3 «-»

Матрица C после образа 1

	1	2	3	4
1	0	2	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	0	-1	0	0

4. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; C стр.1 «-», 3 «+»

⊕ Матрица C после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	1	-1	0	0

Система обучена после **семи** предъявлений образов из обучающего множества.

Общее число предъявлений – $5 + 7 = 12$.

Матрицы C , полученные после первого и второго вариантов предъявления, совпадают.

Вывод – для уменьшения числа предъявлений при любом исходе предъявляется следующий по порядку образ.

Обучение первым методом

Обучим распознавать **последний** образ.

При любом исходе будем предъявлять следующий образ.

Матрица **C** перед первым предъявлением образа соответствует результату обучения первым трем образам.

1. Предъявлен образ 4 (1001), класс 3
 $R = -2, 1, 1$; ответ 2 – нет; C стр.2 «-», 3 «+»
 Матрица C после образа 4

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	-1	-1	1	0
3	2	-1	0	1

4. Предъявлен образ 3 (1000), класс 3
 $R = -1, 0, 1$; ответ 3 – да; C не меняется
 5. Предъявлен образ 4 (1001), класс 3
 $R = -2, 1, 1$; ответ 2 – нет; C стр.2 «-», 3 «+»
 Матрица C после образа 4

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	-1	-1	2	0
3	2	-1	-1	1

8. Предъявлен образ 3 (1000)
 $R = -1, 0, 1$; ответ 3 – да; C не меняется
 9. Предъявлен образ 4 (1001), класс 3
 $R = -2, 1, 1$; ответ 2 – нет; C стр.2 «-», 3 «+»
 Матрица C после образа 4

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	-1	-1	3	0
3	2	-1	-2	1

2. Предъявлен образ 1 (1100)
 $R = 1, -2, 1$; ответ 1 – да; C не меняется
 3. Предъявлен образ 2 (1011)
 $R = -3, 0, 3$; ответ 3 – нет; C стр.2 «+», 3 «-»
 Матрица C после образа 2

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	0	-1	2	1
3	1	-1	-1	0

6. Предъявлен образ 1 (1100)
 $R = 1, -2, 1$; ответ 1 – да; C не меняется
 7. Предъявлен образ 2 (1011)
 $R = -3, 1, 2$; ответ 3 – нет; C стр.2 «+», 3 «-»
 Матрица C после образа 2

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-1
2	0	-1	3	1
3	1	-1	-2	0

10. Предъявлен образ 1 (1100)
 $R = 1, -2, 1$; ответ 1 – да; C не меняется
 11. Предъявлен образ 2 (1011)
 $R = -3, 2, 1$; ответ 2 – да; C не меняется
 12. Предъявлен образ 3 (1000), класс 3
 $R = -1, -1, 2$; ответ 3 – да; C не меняется
 13. Предъявлен образ 4 (1001), класс 3
 $R = -2, -1, 3$; ответ 3 – да; C не меняется

Система обучена после **13** предъявлений образов из обучающего множества.
 Общее число предъявлений
 $5 + 7 + 13 = 25$.

Обучение первым методом

Обучим систему распознавать сразу все классы, последовательно предъявляя образы из обучающего множества. Матрица **С** перед обучением нулевая.

Система обучена после 13 предъявлений образов, как при обучении последнему образу в предыдущем случае.

Вывод – для уменьшения числа предъявлений следует предъявлять **последовательно все** образы из обучающего множества.

Полученная матрица **С** отличается от предыдущей, но обе работают.

Вывод – значения элементов матрицы **С** обученной системы зависят от порядка предъявления образов из обучающего множества.

1. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=0,0,0$; ответ 1 – да; **С** не меняется

2. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; стр.1 «-», 2 «+»

Матрица **С** после образа 2

	1	2	3	4
1	-1	0	-1	-1
2	1	0	1	1
3	0	0	0	0

4. Предъявлен образ 4 (1001)

$R=-2,1,1$; ответ 2 – нет; стр.2 «-», 3 «+»

Матрица **С** после образа 4

	1	2	3	4
1	-1	0	-1	-1
2	-1	0	1	0
3	2	0	0	1

6. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-2,0,2$; ответ 3 – нет; стр.2 «+», 3 «-»

Матрица **С** после образа 2

	1	2	3	4
1	0	1	-1	-1
2	0	0	2	1
3	0	-1	-1	0

8. Предъявлен образ 4 (1001)

$R=-2,1,1$; ответ 2 – нет; столб.2 «-», 3 «+»

Матрица **С** после образа 4

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	-1	0	2	0
3	2	-1	-1	1

10. Предъявлен образ 2 (1011)

$R=-2,1,1$; ответ 2 – да; **С** не меняется

11. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=0,-1,1$; ответ 3 – да; **С** не меняется

3. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=-1,1,0$; ответ 2 – нет; стр.2 «-», 3 «+»

Матрица **С** после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	0	-1	-1
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0

5. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=-1,-1,2$; ответ 3 – нет; стр.1 «+», 3 «-»

Матрица **С** после образа 1

	1	2	3	4
1	0	1	-1	-1
2	-1	0	1	0
3	1	-1	0	1

7. Предъявлен образ 3 (1000)

$R=0,0,0$; ответ 1 – нет; стр. 1 «-», 3 «+»

Матрица **С** после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	0	0	2	1
3	1	-1	-1	0

9. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=0,-1,1$; ответ 3 – нет; столб.1 «+», 3 «-»

Матрица **С** после образа 1

	1	2	3	4
1	0	2	-1	-1
2	-1	0	2	0
3	1	0	-1	1

12. Предъявлен образ 4 (1001)

$R=-1,-1,2$; ответ 3 – да; **С** не меняется

13. Предъявлен образ 1 (1100)

$R=2,-1,1$; ответ 1 – да; **С** не меняется

Обучение вторым методом

Корректируются все k -е строки матрицы \mathbf{C} с $r_k \geq r_t$ и $k \neq t$, а также строка t .
Предъявляются подряд все образы из обучающего множества.

1. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=0,0,0$; ответ 1 – да; \mathbf{C} не меняется

2. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=0,0,0$; ответ 1 – нет; $1\langle-\rangle, 2\langle+\rangle, 3\langle-\rangle$

Матрица \mathbf{C} после образа 2

	1	2	3	4
1	-1	0	-1	-1
2	1	0	1	1
3	-1	0	-1	-1

4. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-3,1,-1$; ответ 2 – нет; $1\langle 0 \rangle, 2\langle-\rangle, 3\langle+\rangle$

Матрица \mathbf{C} после образа 4

	1	2	3	4
1	-2	0	-1	-1
2	-1	0	1	0
3	1	0	-1	0

6. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=-3,-1,-1$; ответ 2 – да; \mathbf{C} не меняется

8. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-2,-2,0$; ответ 4 – да; \mathbf{C} не меняется

3. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=-1,1,-1$; ответ 2 – нет; $1\langle-\rangle, 2\langle-\rangle, 3\langle+\rangle$

Матрица \mathbf{C} после образа 3

	1	2	3	4
1	-2	0	-1	-1
2	0	0	1	1
3	0	0	-1	-1

5. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=-2,-1,1$; ответ 3 – нет; $1\langle+\rangle, 2\langle-\rangle, 3\langle-\rangle$

Матрица \mathbf{C} после образа 1

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	-2	-1	1	0
3	0	-1	-1	0

7. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=-1,-2,0$; ответ 3 – да; \mathbf{C} не меняется

9. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=0,-3,-1$; ответ 1 – да; \mathbf{C} не меняется

Система обучена после **девяти** предъявлений образов из обучающего множества.

Обучение третьим методом

Корректируются все k -е строки матрицы \mathbf{C} с $r_k \geq r_t$, а также строка t , если была хотя бы одна коррекция, причем без проверки правильности распознавания.

1. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=0,0,0$; стр. 1 «+», 2 «-», 3 «-»

Матрица \mathbf{C} после образа 1

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	-1	-1	0	0
3	-1	-1	0	0

3. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=0,0,-2$; стр. 1 «-», 2 «-», 3 «+»

Матрица \mathbf{C} после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	-1	-1	1	1
3	-1	-1	-1	-1

5. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=-1,-3,-1$; стр. 1 «+», 2 «0», 3 «-»

Матрица \mathbf{C} после образа 1

	1	2	3	4
1	-1	2	-1	-2
2	-2	-1	1	0
3	-1	-2	-1	0

8. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-4,-2,0$; \mathbf{C} не меняется

9. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=0,-3,-2$; \mathbf{C} не меняется

2. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=1,-1,-1$; стр. 1 «-», 2 «+», 3 «-»

Матрица \mathbf{C} после образа 2

	1	2	3	4
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	-2	-1	-1	-1

4. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-2,0,-2$; стр. 1 «-», 2 «-», 3 «+»

Матрица \mathbf{C} после образа 4

	1	2	3	4
1	-2	1	-1	-2
2	-2	-1	1	0
3	0	-1	-1	0

6. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=-4,-1,-2$; \mathbf{C} не меняется

7. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=-1,-2,-1$; стр. 1 «-», 2 «0», 3 «+»

Матрица \mathbf{C} после образа 3

	1	2	3	4
1	-2	2	-1	-2
2	-2	-1	1	0
3	0	-2	-1	0

10. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=-5,-1,-1$; стр. 1 «0», 2 «+», 3 «-»

Матрица \mathbf{C} после образа 2

	1	2	3	4
1	-2	2	-1	-2
2	-1	-1	2	1
3	-1	-2	-2	-1

12. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-4,-1,-1$; стр. 1 «0», 2 «-», 3 «+»

Матрица \mathbf{C} после образа 4

	1	2	3	4
1	-2	2	-1	-2
2	-3	-1	2	0
3	1	-2	-2	0

15. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=-2,-2,0$; \mathbf{C} не меняется

16. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-4,-1,-1$; стр. 1 «0», 2 «-», 3 «+»

Матрица \mathbf{C} после образа 4

	1	2	3	4
1	-2	2	-1	-2
2	-3	-1	3	0
3	1	-2	-3	0

11. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=-2,-1,-1$; стр. 1 «0», 2 «-», 3 «+»

Матрица \mathbf{C} после образа 3

	1	2	3	4
1	-2	2	-1	-2
2	-2	-1	2	1
3	0	-2	-2	-1

13. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=0,-4,-1$; \mathbf{C} не меняется

14. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=-5,-1,-1$; стр. 1 «0», 2 «+», 3 «-»

Матрица \mathbf{C} после образа 2

	1	2	3	4
1	-2	2	-1	-2
2	-2	-1	3	1
3	0	-2	-3	-1

17. Предъявлен образ 1 (1100)

$\mathbf{R}=0,-4,-1$; \mathbf{C} не меняется

18. Предъявлен образ 2 (1011)

$\mathbf{R}=-5,0,-2$; \mathbf{C} не меняется

19. Предъявлен образ 3 (1000)

$\mathbf{R}=-2,-3,1$; \mathbf{C} не меняется

20. Предъявлен образ 4 (1001)

$\mathbf{R}=-4,-3,1$; \mathbf{C} не меняется

Система обучена после **20** предъявлений, т.к. требование более строгое - максимальное значение элемента в векторе \mathbf{R} должно быть единственным, что и видно на шагах 17-20. В предыдущем случае (шаги 6-9) иногда элементы вектора имеют одинаковое значение.

Обучение четвертым методом

Вектор **R** не вычисляется, а выполняется только корректировка элементов матрицы **C**. После однократного предъявления всех образов обучение заканчивается.

1. Предъявлен образ 1 (1100)

стр. 1 «+», 2 «-», 3 «-»

Матрица **C** после образа 1

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	-1	-1	0	0
3	-1	-1	0	0

3. Предъявлен образ 3 (1000)

стр. 1 «-», 2 «-», 3 «+»

Матрица **C** после образа 3

	1	2	3	4
1	-1	1	-1	-1
2	-1	-1	1	1
3	-1	-1	-1	-1

5. Предъявлен образ 1 (1100)

R=-1,-3,-1; ответ 1 – да

7. Предъявлен образ 3 (1000)

R=-2,-2,0; ответ 3 – да

2. Предъявлен образ 2 (1011)

стр. 1 «-», 2 «+», 3 «-»

Матрица **C** после образа 2

	1	2	3	4
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	-2	-1	-1	-1

4. Предъявлен образ 4 (1001)

стр. 1 «-», 2 «-», 3 «+»

Матрица **C** после образа 4

	1	2	3	4
1	-2	1	-1	-2
2	-2	-1	1	0
3	0	-1	-1	0

6. Предъявлен образ 2 (1011)

R=-5,-1,-1; ответ 2 – да

8. Предъявлен образ 4 (1001)

R=-4,-2,0; ответ 4 – да

Система обучена после 8 предъявлений – самый быстрый метод.

18 Обучение четвертым методом

Метод «Прямого оценивания» не всегда дает положительный результат.

Пример. Обучающее множество из шести образов, относящихся к двум классам, с двумя положительными целочисленными признаками.

Признак / образ	Класс 1			Класс 2		
	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	4	5	6
2	1	2	3	7	8	9

Изменение в процессе обучения матрицы **C** после предъявления каждого образа

	<u>Начальн.</u>		4 1 (1)		5 2 (1)		6 3 (1)		4 7 (2)		5 8 (2)		6 9 (2)	
1	0	0	4	1	9	3	15	6	11	-1	6	-9	0	-18
2	0	0	-4	-1	-9	-3	-15	-6	-11	1	-6	9	0	18

Матрица **C** должна обеспечить правильное распознавание любого образа из обучающего множества. Предъявляя их, получим ошибочное распознавание образов первого класса. Результат обучения вторым методом (изменения **C** только при ошибке распознавания)

[illegible]

Разделение пространства

После обучения решающая матрица **C** содержит в себе параметры линейного разделения пространства признаков.

Недостаток. Все линии (гиперплоскости в многомерном пространстве) проходят через начало координат.

Пример. Заданы шесть образов и три класса. Пространство признаков - плоскость.

Образ	Класс	x_1	x_2
1	1	3	8
2	1	5	9
3	2	8	4
4	2	7	2
5	3	-3	6
6	3	-3	4

После **успешного** обучения прямым оцениванием матрица **C** будет иметь вид:

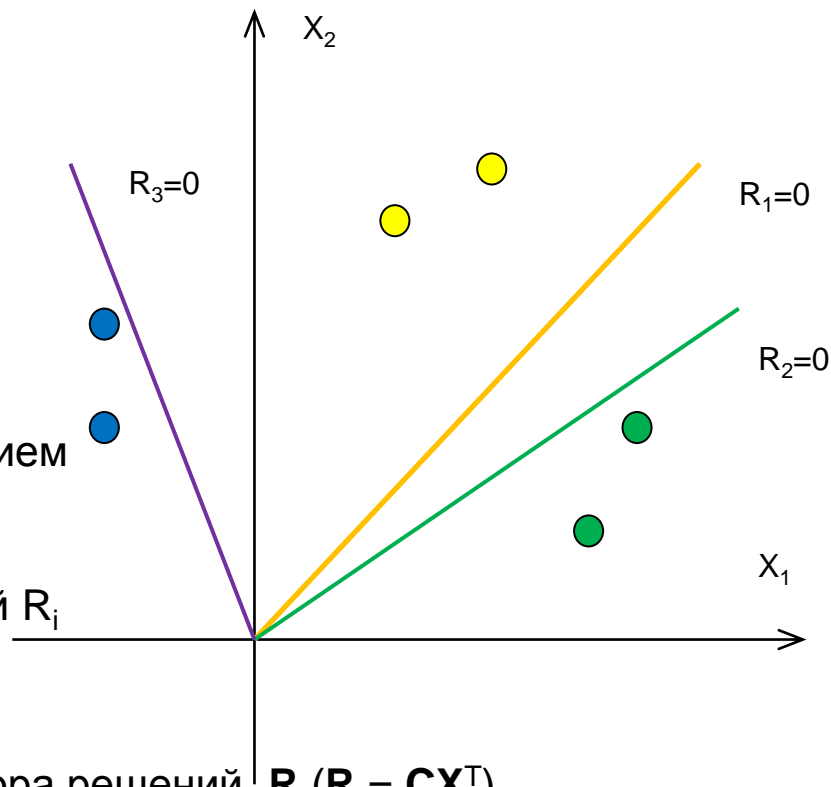
C	x_1	x_2
Класс 1	-1	1
Класс 2	13	-21
Класс 3	-3	4

Уравнение прямой R_i

для i -го класса

$$C_{i1}x_1 + C_{i2}x_2 = 0$$

R_i – элемент вектора решений **R** ($R = CX^T$)



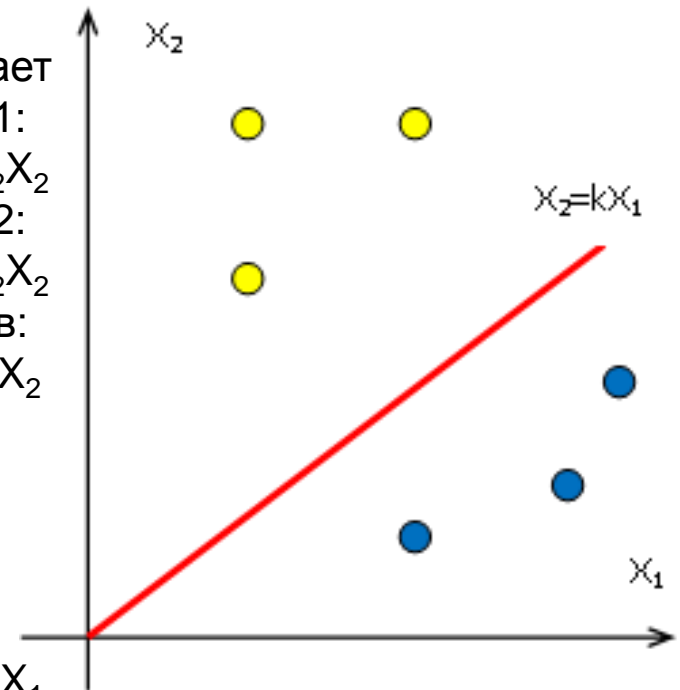
Разделение пространства

Линии $R_i=0$ не являются линиями, разделяющими пространство признаков на области, соответствующие отдельным классам. Они только обеспечивают для всех образов из обучающего множества выполнение неравенства: $R_i > R_j$ ($i \neq j$) для всех образов i -го кл.

Пример. Заданы шесть образов и два класса. Пространство признаков - плоскость.

Образ	Класс	x_1	x_2
1	1	3	10
2	1	3	7
3	1	6	10
4	2	9	3
5	2	6	2
6	2	10	5

Матрица **C** обеспечивает
 для (X_1, X_2) из класса 1:
 $C_{11}X_1 + C_{12}X_2 > C_{21}X_1 + C_{22}X_2$
 для (X_1, X_2) из класса 2:
 $C_{11}X_1 + C_{12}X_2 < C_{21}X_1 + C_{22}X_2$
 Линия раздела классов:
 $C_{11}X_1 + C_{12}X_2 = C_{21}X_1 + C_{22}X_2$



После **успешного** обучения прямым оцениванием матрица **C** будет иметь вид:

C	x_1	x_2
Класс 1	-4	-16
Класс 2	6	25

Уравнение прямой,
 разделяющей классы
 $X_2 = (C_{21} - C_{11}) / (C_{12} - C_{22}) * X_1$

коэффициент $k = (C_{21} - C_{11}) / (C_{12} - C_{22}) = 0,765$

Недостаток. Разделяющая классы линия не оптимальна, т.к. по сравнению с методом опорных векторов, не гарантирует максимальную ширину полосы, разделяющую классы

Ограничения

Обучающие множества и соответствующие им матрицы **C**, если обучение вторым методом закончилось успешно, а также **N** – число предъявлений образов.

Примеры: 1

Пр.	Класс 1			Класс 2			N нет		Класс 1			Класс 2			N=30	
1	1	2	3	9	8	7			1	2	1	9	7	9	-7	6
2	1	2	3	9	8	7			2	3	4	9	8	7	7	-6

3

4

Пр.	Класс 1			Класс 2			N нет		Класс 1			Класс 2			N=78	
1	1	1	2	9	9	8			1	2	2	9	9	8	-14	15
2	1	2	1	9	8	9			3	2	3	7	8	7	14	-15

Первое условие – отсутствие пересечения классов в обучающем множестве.

Вытекает из того, что обучение заканчивается при правильном распознавании **всех** образов из обучающего множества. Если классы пересекаются, то невозможно создать систему, правильно распознающую **все** образы из обучающего множества, а можно только минимизировать число ошибок при их распознавании.

Второе условие – возможность линейного разделения классов из обучающего множества гиперплоскостями, проходящими через **начало** координат в пространстве признаков. Вытекает из того, что уравнения для значений вектора **R** описывают гиперплоскости в пространстве признаков, проходящие через начало координат (в случае двух признаков и двух классов это одна линия).

Ограничения

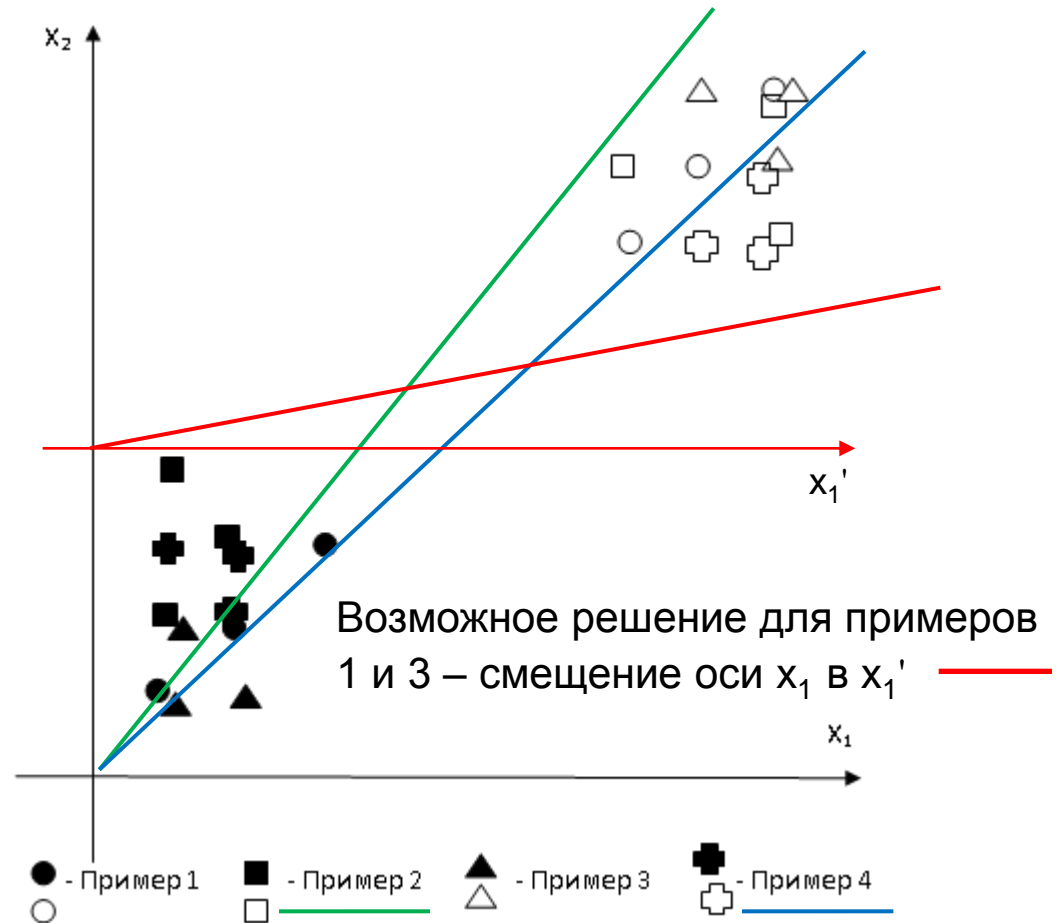
Обучающие множества в пространстве признаков (см. таблицу слайда 20).

Вектор $\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{X}^T$

$$r_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$$

$$r_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

Для плоскости x_1x_2 равенство $r_1 = r_2$ – уравнение прямой, проходящей через «0» и разделяющей классы 1 и 2



Все образы в примере 1 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, т.е. не существует такой матрицы \mathbf{C} , что значения r_1 для образов первого класса были больше чем r_2 для образов второго класса и наоборот.

Аналогично, расположение образов в примере 3 не позволяет найти такую матрицу \mathbf{C} .

Ограничения

Пример с **одним** признаком x и двумя классами: класс I: (-1, -2, -3) и класс II: (1, 2, 3). После обучения элементы матрицы **C** (в данном случае это вектор): $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Все образы из обучающего множества распознаются.

После смещения образов в положительную часть оси (+4): класс I: (3, 2, 1) и II: (5, 6, 7) обучение заканчивается неудачей – матрица **C** не формируется.

Причина в том, что согласно способу распознавания коэффициенты c_1 и c_2 должны **одновременно** удовлетворять следующим условиям: $c_1 x_1 > c_2 x_1$ и $c_1 x_2 < c_2 x_2$, где x_1, x_2 – значение признака x для образов, относящихся к первому и второму классам соответственно, т.е. $(c_1 - c_2)x_1 > 0$ для всех x_1 и $(c_1 - c_2)x_2 < 0$ для всех x_2 , что выполнимо только при условии – все $x_1 > 0$ и все $x_2 < 0$.

Другое решение состоит в смещении гиперплоскости относительно начала координат за счет добавления фиктивного признака с постоянным значением.

Например, после добавления второго признака с постоянным единичным значением для всех образов обучающего множества из примера после 36-ти предъявлений получим

матрицу **C** = $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$. В новом пространстве признаков точки (образы) обучающего

множества лежат на линии, параллельной оси первого признака и находящейся от нее на единичном расстоянии. Разделяющая линия проходит через начало координат.

Проблема – положение разделяющей гиперплоскости неоптимальное, относительно ширины полосы, разделяющей образы классов (см. Метод опорных векторов).

Обучение экспертной системы

Алгоритм работы экспертной системы

На каждом шаге система выбирает наиболее информативный в данный момент признак и запрашивает его значение. После получения запрошенного признака вычисляются элементы r_j вектора \mathbf{R} , причем учитываются только те признаки, информация о которых уже получена. Далее находится класс d , для которого $r_d = \max(r_j)$. Если в векторе \mathbf{R} элементов с максимальным значением несколько, то выбирается класс с наименьшим номером.

Для определения наиболее подходящего на данный момент класса для распознаваемого образа вычисляются f_j – возможные значения элементов вектора \mathbf{R} по еще не полученным признакам x_i :

$$f_j = r_j + \sum_i h_i,$$

где h_j – возможное значение для j -го класса. Для $j = d$ $f_d = r_d$, т.е. сумма h_i не вычисляется. Для остальных j значения h_i вычисляются следующим образом: если $c_{ji} > c_{di}$, то $h_i = \max(x_i)(c_{ji} - c_{di})$; если $c_{ji} < c_{di}$, то $h_i = \min(x_i)(c_{ji} - c_{di})$; если $c_{ji} = c_{di}$, то $h_i = 0$.

В качестве класса, к которому возможно относится распознаваемый образ, выбирается класс k с максимальным значением f_j . Если таких классов несколько, то выбирается класс с наименьшим номером.

Если $k = d$, т.е. номера классов с $\max(r_j)$ и $\max(f_j)$ совпадают, то ввод значений признаков заканчивается, а сам образ относится к k -му классу. В противном случае решение не принимается, из дальнейшего рассмотрения исключаются j -е классы, для которых $f_j < f_d$ и процесс повторяется.

Обучение экспертной системы

Алгоритм обучения системы

Если система приняла правильное решение, т.е. $k = t$, где t – номер класса, к которому действительно относится распознаваемый образ из обучающего множества, то матрица **C** не изменяется.

Если система ошиблась, то выполняется коррекция матрицы **C**, например, корректируются строка t матрицы, соответствующая правильному классу, а также все k -е строки, для которых $r_k \geq r_t$ и $k \neq t$, где r_k, r_t – элементы вектора **R**.

Далее системе предъявляется следующий образ из обучающего множества и описанный выше цикл повторяется. Обучение заканчивается, если система правильно распознает все имеющиеся в обучающем множестве образы.

Информативность признаков

1. Информативность p_i для одного из еще не запрошенных признаков i через

значения матрицы **C**:
$$p_i = (\max(x_i) - \min(x_i)) \sum_j \text{abs}(c_{ji}),$$

где $\max(x_i)$, $\min(x_i)$ – максимальное и минимальное значения признака x_i у образов обучающего множества, j – номера еще не исключенных из рассмотрения классов.

2. Информативность p_i через дисперсию элементов **C**, соответствующих i -му признаку,

$$p_i = (\max(x_i) - \min(x_i)) \sum_j (c_{cp} - c_{ji})^2,$$

где c_{cp} – среднее значение элементов матрицы **C** для i -го признака по всем j -м классам.

Пример

Обучающее множество

Образ	Класс \ X	1 (крылья)	2(оперенье)	3(мотор)	4(шасси)
1	1 – птица	1	1	0	0
2	2 – самолет	1	0	1	1
3	3 – планер	1	0	0	0

У признака 1 разность макс. и мин. значений равна нулю – его можно не рассматривать при выборе информативного признака и запрашивать его значение в последнюю очередь. У остальных признаков разность макс. и мин. значений совпадает и равна 1, т.е. информативность признаков 2, 3 и 4 определяется только значениями матрицы **C**.

$$p_i = \sum_j \text{abs}(c_{ji}),$$

Предъявлен **образ 1**. Пока исключенных из рассмотрения классов и признаков нет. Информативность признаков 2, 3 и 4 равна нулю, т.к. перед началом обучения матрица **C** = 0. Вводим значение признака 2, как признака с наименьшим номером. Вычисляем вектор **R** (0, 0, 0) – возможный класс $d = 1$ (класс с мин. номером).

Вычисляем значения f_j по признакам 1, 3, 4, значения которых еще не введены: $f_1 = 0$, т.к. $j = d$; $f_2 = 0$, т.к. $c_{2i} = c_{1i}$; $f_3 = 0$, т.к. $c_{3i} = c_{1i}$. В качестве класса, к которому возможно относится распознаваемый образ, выбирается первый класс ($k = 1$), как класс с мин. номером (значения f_j равны между собой). Окончательное решение – образ относится к первому классу ($d = k$), что соответствует информации из обучающего множества ($t = 1$). Матрица **C** сохраняется.

Пример

Предъявлен **образ 2** (1011). Аналогично - возможный класс $d = 1$, $k = 1$, образ относится к классу 1 ($d = k$), что **не соответствует** информации из обучающего множества ($t = 2$). Матрица **С** изменяется.

	x_1	x_2	x_3	x_4
Класс 1	-1	0	-1	-1
Класс 2	1	0	1	1
Класс 3	-1	0	-1	-1

Предъявлен **образ 3** (1000). Исключенных из рассмотрения классов и признаков нет, информативность признаков после предыдущего образа изменилась, т.к. изменилась **С**. Теперь $p_2 = 0 + 0 + 0 = 0$; $p_3 = 1 + 1 + 1 = 3$; $p_4 = 1 + 1 + 1 = 3$. Выбираем для ввода значение признака 3 ($x_3 = 0$). Вычисляем **R** (0, 0, 0) - возможный класс $d = 1$.

Вычисляем f_j по признакам 1, 2, 4, значения которых еще не введены: $f_1 = 0$, т.к. $j = d = 1$; $f_2 = r_2 + \max(x_1)(c_{21} - c_{11}) + 0 + \max(x_4)(c_{24} - c_{14}) = 0 + 2 + 0 + 2 = 4$; $f_3 = r_3 + 0 + 0 + 0 = 0$. (Нулевые значения в суммах f_2, f_3 соответствуют равенству $c_{ji} = c_{1i}$, т.е. $c_{22} = c_{12}$, и $c_{3i} = c_{1i}$). В качестве класса, к которому возможно относится образ, выбираем $k = 2$, как класс с максимальным значением f_j . Образ нельзя отнести к какому-либо классу ($d \neq k$). Нельзя и исключить из дальнейшего рассмотрения какие-либо классы, т.к. нет классов с $f_j < f_d$.

Пример

Из дальнейшего рассмотрения исключен признак 3. Из признаков 2 и 4 как наиболее информативный ($p_2 = 0$, $p_4 = 3$) выбираем признак 4 ($x_4 = 0$). Вычисляем \mathbf{R} (0, 0, 0) - возможный класс $d = 1$.

Вычисляем значения f_j по признакам 1 и 2, значения которых еще не введены: $f_1 = 0$; $f_2 = 0 + 2 + 0 = 2$; $f_3 = 0$. В качестве класса, к которому возможно относится распознаваемый образ, выбирается класс 2 ($k = 2$). Образ нельзя отнести к какому-либо классу ($d \neq k$), нельзя и исключить из дальнейшего рассмотрения какие-либо классы.

Вводим значение признака 2 ($x_2 = 0$). Вычисляем \mathbf{R} (0, 0, 0) - возможный класс $d = 1$.

Вычисляем значения f_j по значению признака 1, который еще не введен: $f_1 = 0$; $f_2 = 0 + 2 + 0 = 2$; $f_3 = 0$. В качестве класса, к которому возможно относится распознаваемый образ, выбирается класс 2 ($k = 2$). Образ нельзя отнести к какому-либо классу ($d \neq k$), нельзя и исключить из дальнейшего рассмотрения какие-либо классы.

Вводим значение последнего признака ($x_1 = 1$). Вычисляем \mathbf{R} (-1, 1, -1). Возможный класс $d = 2$. Признаки в предъявленном образе закончились.

Окончательное решение – образ относится ко второму классу ($k = 2$), что не соответствует информации из обучающего множества ($t = 3$). Матрица \mathbf{C} изменяется.

	x_1	x_2	x_3	x_4
Класс 1	-2	0	-1	-1
Класс 2	0	0	1	1
Класс 3	0	0	-1	-1

Пример

Образы в обучающем множестве закончились. Повторим предъявление образов.

Предъявлен **образ 1**. Пока исключенных из рассмотрения классов и признаков нет.

Информативность признаков $p_2 = 0 + 0 + 0 = 0$; $p_3 = 1 + 1 + 1 = 3$; $p_4 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Выбираем для ввода значение признака 3 ($x_3 = 0$). Вычисляем $\mathbf{R} (0, 0, 0) - d = 1$.

Вычисляем f_j по признакам 1, 2, 4: $f_1 = 0$; $f_2 = 0 + 2 + 0 + 2 = 4$; $f_3 = 0 + 2 + 0 + 0 = 2$. **$k = 2$** .

Образ нельзя отнести к какому-либо классу ($d \neq k$), нельзя и исключить классы.

Из признаков 2 и 4 выбираем 4 ($x_4 = 0$). Вычисляем $\mathbf{R} (0, 0, 0) - d = 1$.

Вычисляем f_j по признакам 1 и 2: $f_1 = 0$; $f_2 = 2$; $f_3 = 2$. **$k = 2$** . Образ нельзя отнести к какому-либо классу ($d \neq k$), нельзя и исключить классы.

Вводим значение признака 2 ($x_2 = 1$). Вычисляем $\mathbf{R} (0, 0, 0) - d = 1$.

Вычисляем значения f_j по значению признака 1: $f_1 = 0$; $f_2 = 2$; $f_3 = 2$. **$k = 2$** . Образ нельзя отнести к какому-либо классу ($d \neq k$), нельзя и исключить классы.

Вводим значение признака 1 ($x_1 = 1$). Вычисляем элементы вектора $\mathbf{R} (-2, 0, 0) - d = 2$.

Признаки закончились. Окончательное решение – образ относится ко второму классу ($k = 2$), что не соответствует истине. Матрица \mathbf{C} изменяется.

	x_1	x_2	x_3	x_4
Класс 1	-1	1	-1	-1
Класс 2	-1	-1	1	1
Класс 3	-1	-1	-1	-1

И так далее...